Международная конференция
Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы (CNSA-2012)
18–23 июня 2012 г., г. Санкт-Петербург

В. Н. Малозёмов

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЧЕБЫШЁВСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ И НЕГЛАДКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

Рассмотрим задачу

$$\varphi(x) := \max_{t \in [a,b]} \left| f(x,t) \right| \to \inf_{x \in \mathbb{R}^n} . \qquad (1)$$

Зафиксируем $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ и обозначим $a \leqslant t_1 < t_2 < \dots < t_r \leqslant b$ точки, в которых

$$\left| f(\hat{x}, t_k) \right| = \varphi(\hat{x}), \quad k \in 1 : r.$$

ТЕОРЕМА (П. Л. Чебышёв, 1859)

Величина $\varphi(\hat{x})$ не приведена к своему наименьшему значению, если система уравнений

$$\sum_{k=1}^{r} f'_x(\hat{x}, t_k) \lambda_k = \mathbb{O}$$

имеет только нулевое решение $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = 0$.

(Другими словами, если векторы $f'_x(\hat{x}, t_k)$, $k \in 1 : r$, линейно независимы.)

Современная формулировка теоремы Чебышёва:

ТЕОРЕМА

Если точка $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ *является решением задачи* (1), *то найдутся неотрицательные числа* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, *в сумме равные единице, такие, что*

$$\sum_{k=1}^{r} \xi_k \alpha_k f'_x(\hat{x}, t_k) = \mathbb{O},$$

где $\xi_k = \mathrm{sign} f(\hat{x}, t_k)$ *и* t_k *— точки максимального уклонения.*

Условия теоремы достаточны в линейном случае, когда

$$f(x,t) = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i(t) - u_0(t).$$

Обозначим через $\mathcal{P}_n$ множество алгебраических полиномов степени не выше n и рассмотрим экстремальную задачу

$$\max_{t\in[-1,1]} \left|P_n(t)\right| \to \inf, \tag{2}$$

где инфимум берётся по всем полиномам $P_n \in \mathcal{P}_n$ со старшим коэффициентом, равным единице.

ТЕОРЕМА (П. Л. Чебышёв)

Единственным решением задачи (2) *является полином*

$$P_n^*(t) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos\bigl(n(\arccos t)\bigr).$$

Полиномы Чебышёва

$$T_n(t) = \cos(n \arccos t)$$

обладают многими экстремальными свойствами.
Напомним одно из них.
Рассмотрим экстремальную задачу

$$\begin{gathered} P_n(b) \to \sup, \\ \big|P_n(t)\big| \leqslant 1, \quad t \in [-1, 1], \end{gathered} \tag{3}$$

где $b > 1$ — фиксированная точка.

ТЕОРЕМА (П. Л. Чебышёв)

Единственным решением задачи (3) *является полином* $T_n(t)$.

Отметим, что решение не зависит от точки b.

Обратимся к обобщению задачи (3):

$$P_n(b) \to \sup$$
$$\left|P_n(t)\right| \leqslant 1, \quad t \in [-1,1]; \tag{4}$$
$$P_n(a) = A; \quad x_n \geqslant 0,$$

где x_n — старший коэффициент полинома $P_n(t)$ и $a < -1$, $b > 1$. Пусть для определённости n нечётно, $n \geqslant 3$.

Положим $A_0 = T_n(a)$, $A_1 = T_{n-1}(a)$.

ТЕОРЕМА

При $A \in (A_0, A_1)$ решение задачи (4) существует и единственно. Для того чтобы полином $P_n^*(t)$, удовлетворяющий ограничениям задачи (4), был её решением, необходимо и достаточно, чтобы нашлись n точек $-1 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leqslant 1$, в которых

$$P_n^*(t_k) = (-1)^{n-k}, \quad k \in 1 : n.$$

Дроби Золотарёва

Обозначим $\mathcal{H}_n^n$ семейство дробей $H(t)$, в числителе и знаменателе которых стоят алгебраические полиномы степени не выше n.

ТРЕТЬЯ ЗАДАЧА ЗОЛОТАРЁВА (1877):

$$\max_{t\in[-1,1]} \big|H(t)\big| \to \inf, \tag{5}$$

где инфимум берётся по всем дробям $H \in \mathcal{H}_n^n$, удовлетворяющим условию

$$\big|H(t)\big| \geqslant 1 \quad \text{при} \quad |t| \geqslant \frac{1}{\tau}, \quad \tau \in (0,1).$$

Задача (5) имеет два решения, различающиеся лишь знаком. Решение, удовлетворяющее дополнительному условию $H(\frac{1}{\tau}) = 1$, называется дробью Золотарёва.

С помощью дробей Золотарёва решается, в частности, задача об оптимальных ADI-параметрах:

$$\max_{t\in[\gamma,1]}\left|\prod_{j=1}^{n}\frac{t-r_j}{t+r_j}\right| \to \inf_{\{r_j\}},$$

где $\gamma \in (0,1)$ — параметр.

В 1933 г. Кауэр (W. Couer) обратил внимание на то, что дроби Золотарёва имеют важные приложения в задачах синтеза электрических фильтров. На математическом уровне трёхполосные фильтры исследовал Амер (R. A.-R. Amer, 1964).

Большой вклад в изучение всех четырех задач Золотарёва внёс Н. И. Ахиезер (1901-1980).

Фильтровые задачи

На полуоси $(0,+\infty)$ задана конечная система попарно не пересекающихся отрезков $[c_i,d_i]$, $i\in I$. Положим

$$D_0=\bigcup_{i\in I_0}[c_i,d_i],\quad D_1=\bigcup_{i\in I_1}[c_i,d_i];\quad D_0\cap D_1=\varnothing.$$

Рассмотрим семейство функций

$$H(X,t)=g(t)\tfrac{P(A,t)}{Q(B,t)},$$

где $X=(A,B)$ и $P(A,t)$, $Q(B,t)$ — алгебраические полиномы степени n и m соответственно. Экстремальная задача

$$\varphi(X):=\max\Big\{\max_{t\in D_0}\big|H(X,t)\big|,\max_{t\in D_1}\tfrac{1}{\big|H(X,t)\big|}\Big\}\to\inf_{\{X\}},\quad (6)$$

называется задачей синтеза многополосного электрического фильтра.

Задача (6) — многоэкстремальная, однако можно описать всю совокупность её локальных решений. Множества

$$\Omega(\sigma) = \bigcap_{i\in I_0} \big\{X = (A, B) \mid \sigma_i Q(B, t) > 0, t \in [c_i, d_i]\big\} \cap$$
$$\cap \bigcap_{i\in I_1} \big\{X = (A, B) \mid \sigma_i P(A, t) > 0, t \in [c_i, d_i]\big\},$$

где $\sigma_i = \pm 1$, называются знаковыми классами. Задача (6) сводится к задаче минимизации на знаковых классах:

$$\max_{X\in\Omega(\sigma)} \varphi(X) \to \min_{\{\sigma\}}.$$

Установлено (В. Н. Малозёмов, 1979), что задача минимизации на знаковом классе в случае его непустоты имеет единственное решение, которое допускает альтернансную характеризацию.

Совершенным сплайном называется функция вида

$$T(t) = \frac{t^r}{r!} + \sum_{k=0}^{r-1} c_k t^k + \frac{2}{r!} \sum_{i=1}^{n} (-1)^i (t - x_i)_+.$$

Здесь $-1 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < 1$.
Характеристическое свойство совершенного сплайна:

$$\left|T^{(r)}(t)\right| \equiv 1 \quad \text{на всех интервалах} \quad (x_i, x_{i+1}).$$

В. М. Тихомиров исследовал экстремальную задачу

$$\max_{t\in[-1,1]} \left|T(t)\right| \to \inf_{\{c_k, x_i\}}. \qquad (7)$$

ТЕОРЕМА (В. М. Тихомиров, 1969)

Совершенный сплайн, наименее уклоняющийся от нуля, существует и единственен.

Я называю решение задачи (7) *функцией Тихомирова*. Функция Тихомирова $T_{r,n}(t)$ характеризуется наличием полного альтернанса — точек

$$-1 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{r+m} = 1,$$

в которых $T_{r,n}(t_j) = (-1)^{r+j}\|T_{r,n}\|$, $j \in 0 : r+n$. Задача (7) допускает далеко идущие обобщения. Простейшее из них получается при ограничениях

$$T^{(s)}(-1) = T^{(s)}(1) = 0, \quad s \in 0 : r-1.$$

Моносплайном называется функция вида

$$G(t) = t^{r+1} - \sum_{k=0}^{r} c_k t^k - \sum_{i=1}^{n} a_i (t - x_i)_+^r.$$

Моносплайны возникают при анализе квадратурных формул

$$\int_0^1 f(x)dx = \tfrac{1}{r+1} \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i) + R(f),$$

где $0 \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leqslant 1$. Наилучшая квадратурная формула на классе $W_1^{r+1}M$ получается в результате решения экстремальной задачи

$$\sup_{f \in W_1^{r+1}M} \left| R(t) \right| \to \inf_{\{a_i, x_i\}} . \tag{8}$$

Задача (8) сводится к задаче о моносплайне, наименее уклоняющемся от нуля:

$$\max_{t\in[0,1]} \left| G(t) \right| \to \inf_{\{a_i, x_i\}}$$

при ограничениях $G^{(s)}(0) = G^{(s)}(1) = 0$, $s \in 0 : r$.

ТЕОРЕМА (В. Н. Малозёмов и А. Б. Певный, 1980)

Оптимальная квадратурная формула на классе $W_1^{r+1}M$ *существует и единственна. При этом* $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < 1$ *и все коэффициенты* a_i *положительны.*

Для нахождения параметров $\{a_i, x_i\}$ оптимальной квадратурной формулы нужно решать нелинейную систему уравнений порядка $4n - r + 1$.

Для приближённого решения дискретных чебышёвских задач

$$\varphi(x) := \max_{i\in I}\Big|f_i(x)\Big| \to \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \tag{9}$$

разработаны эффективные численные методы, в частности, методы линеаризации. Опишем принципиальную схему метода линеаризации Б. Н. Пшеничного.

Пусть имеется k-е приближение $x_k \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим вспомогательную задачу определения напрвления спуска:

$$\max_{i\in I}\Big|f_i(x_k) + \Big\langle f_i'(x_k), h\Big\rangle\Big| + \tfrac{1}{2}\|h\|^2 \to \min_{h\in\mathbb{R}^n}. \tag{10}$$

Задача (10) сводится к задаче квадратичного программирования. Она имеет единственное решение, которое обозначим h_k.

Если $h_k = \mathbb{O}$, то x_k — стационарная точка. Вычисления прекращаются. Иначе переходим к следующему приближению

$$x_{k+1} = x_k + t_k h_k,$$

где $t_k > 0$ — шаг, обеспечивающий подходящее убывание целевой функции $\varphi(x)$.
Метод линеаризации Пшеничного имеет квадратичную скорость сходимости в случае, когда решение задачи (9) обладает полным альтернансом (В. А. Даугавет, В. Н. Малозёмов, 1981).
Для решения непрерывных чебышёвских задач используется метод выравнивания максимумов, который также имеет квадратичную скорость сходимости в окрестности точки, обладающей полным альтернансом.

Аппроксимация с интерполяцией

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\varphi(x) := \max_{t\in[a,b]} \big|f(x,t)\big| \to \inf$$

при ограничениях

$$f(x,\tau_j) = 0, \quad j \in 1:m. \tag{11}$$

Предположим, что в точке $x^* \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющей ограничениям (11), система функций

$$u_k(t) = f'_{x_k}(x^*,t), \quad k \in 1:n,$$

является чебышёвской на $[a,b]$. В этом случае справедливо следующее утверждение (В. А. Даугавет, В. Н. Малозёмов, 1977).

ТЕОРЕМА

Для того, чтобы x^* была точкой строгого локального минимума функции $\varphi(x)$ при ограничениях (11), необходимо и достаточно, чтобы существовали точки максимального уклонения

$$a \leqslant t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-m} \leqslant b,$$

такие, что

$$f(x^*, t_i) = (-1)^{s_i+1} f(x^*, t_{i-1}), \quad i \in 1 : n-m,$$

где s_i — число узлов интерполяции τ_j, лежащих в интервале (t_{i-1}, t_i).